Chapitre 4

Espaces hermitiens

Dans ce chapitre, les espaces vectoriels considérés sont, sauf mention du contraire, des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. Ce chapitre est important, par exemple, dans l'étude des séries de Fourier.

4.1 Formes sesquilinéaires

Définition 4.1.1. *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f\colon E\times E \to \mathbb{C}$. On dit que f est une* **forme sesquilinéaire** *sur E si f vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout $a \in E$, l'application $E \to \mathbb{C}$, $y \to f(a,y)$ est linéaire, i.e.,*

$$\forall\,(u,v) \in E \times E,\, \forall\,\lambda \in \mathbb{C}, \quad f(a, u + \lambda v) = f(a,u) + \lambda f(a,v).$$

En d'autres termes, pour tout $a \in E$, l'application $y \to f(a,y)$ est une forme linéaire sur E.

(ii) *Pour tout $b \in E$, l'application $E \to \mathbb{C}$, $x \to f(x,b)$ est* **semi-linéaire***, i.e.,*

$$\forall\,(x,y) \in E \times E,\, \forall\,\alpha \in \mathbb{C}, \quad f(x + \alpha y, b) = f(x,b) + \overline{\alpha} f(y,b).$$

Soit f une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$. Compte tenu des définitions, dire que f est sesquilinéaire signifie que pour tous $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et tous $x, y, u, v \in E$,

$$f(\alpha x + \beta y, \lambda u + \mu v) = \overline{\alpha}\lambda f(x,u) + \overline{\alpha}\mu f(x,v) + \overline{\beta}\lambda f(y,u) + \overline{\beta}\mu f(y,v).$$

⚠ **Attention** : si f est sesquilinéaire, l'application $x \to f(x,b)$ n'est pas une forme linéaire en général ; elle l'est seulement si l'application $x \to f(x,b)$ est nulle.

Exemples. 1) Soient φ et ψ des formes linéaires sur E. L'application

$$E \times E \to \mathbb{C}\ ,\ (x,y) \to \overline{\varphi(x)}\psi(y)$$

est une forme sesquilinéaire sur E.

2) Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. L'application

$$E \times E \to \mathbb{C}\ ,\ (f,g) \to \int_0^1 \overline{f(t)} g(t)\, dt$$

est une forme sesquilinéaire sur E.
3) Supposons E de dimension finie n, et soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $p \in \{1, 2, \dots, n\}$. Si $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ sont des vecteurs de E, posons :

$$f(x, y) = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \cdots + \overline{\lambda_p}\mu_p.$$

On obtient ainsi une forme sesquilinéaire sur E.

♦ **Exercice 45.** Vérifier dans chacun des exemples précédents que f est en effet une forme sesquilinéaire sur E.

Supposons E de dimension finie $n > 0$. Soient $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et f une forme sesquilinéaire. Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, posons $a_{ij} = f(e_i, e_j)$, et soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est la ***matrice de*** f ***dans la base*** $\mathcal{E}$, et on écrit $A = \mathrm{Mat}(f; \mathcal{E})$.
Soient $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ des vecteurs de E. Notons X et Y les matrices de x et y dans la base $\mathcal{E}$.

♦ **Exercice 46.** Écrire $f(x, y)$ en fonction des matrices A, X et Y.

4.2 Produit scalaire hermitien

Définition 4.2.1. *Soient E un espace vectoriel et f une forme sesquilinéaire sur E. On dit que f est* **hermitienne** *si pour tous $x, y \in E$,*

$$f(y, x) = \overline{f(x, y)}.$$

> ***Charles Hermite*** *(24 décembre 1822 à Dieuze – 14 janvier 1901 à Paris) est un mathématicien français. Ses travaux concernent surtout la théorie des nombres, les formes quadratiques, les polynômes orthogonaux, les fonctions elliptiques et les équations différentielles.*

Pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note A^* la matrice ${}^t\bar{A}$, i.e.,

$$A^* = {}^t\bar{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_{1,1}} & \cdots & \overline{a_{n,1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1,n}} & \cdots & \overline{a_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

La notation sera justifiée dans la suite du chapitre.

♦ **Exercice 47.** Soient E un espace vectoriel et f une forme sesquilinéaire sur E.
1) Montrer que f est hermitienne si et seulement si $A = A^*$.
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est ***hermitienne*** si $A = A^*$. On note $\mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes d'ordre n.
2) Vérifier que $\mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n^2. Est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Remarque. Si f est une forme sesquilinéaire hermitienne sur l'espace E, alors $f(x, x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in E$ (à justifier).

La remarque justifie la définition suivante :

Définition 4.2.2. *Soient E un espace vectoriel et f une forme sesquilinéaire hermitienne sur E.*

(i) *On dit que f est* **positive** *(resp.* **négative***) si $f(x,x) \geqslant 0$ (resp. $f(x,x) \leqslant 0$) pour tout $x \in E$.*

(ii) *On dit que f est* **définie positive** *(resp.* **définie négative***) si elle est positive (resp. négative) et si $f(x,x) = 0$ si et seulement si x est nul.*

♦ **Exercice 48.** Reprendre les exemples de l'exercice 45. Parmi eux, quels sont ceux pour lesquels f est positive ? définie positive ?

Définition 4.2.3. *On appelle* **produit scalaire (hermitien)** *sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive. Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un* **espace (vectoriel) hermitien***.*

4.3 Premières propriétés

Dans la suite de ce chapitre, E est un espace vectoriel hermitien. Si x, y sont des vecteurs de E, on note $(x \,|\, y)$ le produit scalaire de x et de y (dans cet ordre). L'application

$$E \times E \to \mathbb{C}\ ,\ (x,y) \to (x|y)$$

est donc une forme sesquilinéaire hermitienne et définie positive sur E. On a $(x \,|\, x) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $x \in E$. On peut donc considérer :

$$\|x\| = \sqrt{(x \,|\, x)}.$$

La proposition suivante est l'analogue de la proposition 1.3.1 :

Proposition 4.3.1. *Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :*

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ *(homogénéité) ;*

(ii) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x \,|\, y) + \|y\|^2$ *;*

(iii) $|(x \,|\, y)| \leqslant \|x\|.\|y\|$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz) ;*

(iv) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire) ;*

(v) $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|$ *;*

(vi) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$ *(identité de la médiane).*

⚠ **Attention** : ici, $|\cdot|$ désigne le module. D'autre part, on notera dans (ii) que le terme le terme « $2(x \,|\, y)$ » est remplacé ici par « $2\,\mathrm{Re}\,(x \,|\, y)$ ».

Remarque. On dit que $x \in E$ est ***unitaire*** si $\|x\| = 1$.

On définit exactement comme dans le cas euclidien la notion de ***vecteurs orthogonaux***, d'***orthogonal d'une partie***, de ***familles orthogonales/orthonormales***, etc., et le Théorème de Pythagore (cf. Théorème 1.3.6) reste valable pour les espaces hermitiens.
Le théorème suivant se démontre comme le Théorème 1.4.1, à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

Théorème 4.3.2 (procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soient E un espace vectoriel hermitien de dimension finie $n > 0$ et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe une base $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ de E possédant les propriétés suivantes :*

(i) *$\mathcal{F}$ est une famille orthonormée ;*
(ii) *pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on a* $\mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_j) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j)$.

Corollaire 4.3.3. *Si E est un espace hermitien de dimension finie non nulle, il possède des bases orthonormées.*

Supposons E de dimension finie $n > 0$, et soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soient $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$ des vecteurs de E. Notons X et Y les matrices de x et y dans la base $\mathcal{E}$. On a vu que

$$(x \,|\, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\lambda_i} \mu_j (e_i | e_j).$$

La base $\mathcal{E}$ étant orthonormée, il vient donc :

$$(x \,|\, y) = \overline{\lambda_1} \mu_1 + \cdots + \overline{\lambda_n} \mu_n = X^* Y = \overline{Y^* X}.$$

♦ **Exercice 49.** Justifier ces assertions.

Comme pour les espaces euclidiens, on peut énoncer le théorème « de la base orthonormée incomplète » :

Théorème 4.3.4. *Soit E un espace hermitien de dimension finie non nulle n.*
(i) *Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$, avec $1 \leqslant p < n$, une famille orthonormée de vecteurs de E. Il existe $e_{p+1}, \ldots, e_n \in E$ tels que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.*
(ii) *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a :*

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

En particulier :

$$\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F.$$

4.4 Adjoint d'un endomorphisme

Dans tout ce paragraphe, E est un espace vectoriel hermitien de dimension finie $n > 0$.

Théorème 4.4.1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un et un seul endomorphisme de E, noté u^*, et appelé l'*adjoint *de u, tel que pour tous $x, y \in E$,*

$$(u(x) \,|\, y) = (x \,|\, u^*(y)).$$

Si $\mathcal{E}$ est une base orthonormée *de E, on a :*

$$\mathrm{Mat}(u^*; \mathcal{E}) = (\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}))^*.$$

La dernière assertion justifie, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la notation $A^* = {}^t\bar{A}$.

♦ **Exercice 50.** Démontrer ce théorème.

Proposition 4.4.1. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors :*
(i) $(\lambda u + \mu v)^* = \overline{\lambda} u^* + \overline{\mu} v^*$ *;*
(ii) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ *;*
(iii) $(u^*)^* = u$ *;*
(iv) *on a $(\mathrm{Id}_E)^* = \mathrm{Id}_E$ et, si $u \in GL(E)$, alors $u^* \in GL(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.*

♦ **Exercice 51.** 1) Démontrer la proposition.
2) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que$F^{\perp}$ est stable par u^*.

4.5 Endomorphismes unitaires

Dans ce paragraphe, n est un entier strictement positif. On suppose que $\mathbb{C}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$) est muni de son produit scalaire ***canonique***, c'est-à-dire que

$$(x \mid y) = \overline{x_1}y_1 + \cdots + \overline{x_n}y_n$$

pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Définition 4.5.1. *Une matrice $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite* **unitaire** *si elle est inversible et si $\Omega^{-1} = \Omega^*$.*

♦ **Exercice 52.** 1) Montrer que l'ensemble des matrices unitaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe du groupe $GL_n(\mathbb{C})$. On le note $U(n)$, et on dit que c'est le ***groupe unitaire de degré*** n.

Si $\Omega \in U(n)$, de $\Omega^{-1} = \Omega^*$, on déduit $|\det \Omega|^2 = 1$, donc $\det \Omega \in \mathbb{U}$, où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est l'ensemble des complexes de module 1. On pose :

$$SU(n) = \{\Omega \in U(n) \mid \det \Omega = 1\}.$$

2) Montrer que l'ensemble $SU(n)$ est un sous-groupe de $U(n)$, appelé le ***groupe spécial unitaire de degré*** n.

Théorème-Définition 4.5.1. *Soient E un espace hermitien de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\|u(x)\| = \|x\|$ *pour tout* $x \in E$;

(ii) $(u(x) \mid u(y)) = (x|y)$ *pour tous* $x, y \in E$;

(iii) $u \in GL(E)$ *et* $u^* = u^{-1}$;

(iv) *il existe une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E telle que* $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) \in U(n)$;

(v) *pour toute base orthonormée $\mathcal{E}$ de E, on a* $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) \in U(n)$;

(vi) *il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ soit une base orthonormée de E ;*

(vii) *pour toute base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que u est un endomorphisme **unitaire** *de E.*

Les endomorphismes unitaires sont ainsi les analogues des endormorphismes orthogonaux pour les espaces hermitiens.

Corollaire 4.5.2. *Si $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Ω est une matrice unitaire ;*

(ii) *il existe des bases orthonormées $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de E telles que Ω soit la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$.*

On note $U(E)$ l'ensemble des endomorphismes unitaires de E. C'est un sous-groupe de $GL(E)$. On dit que c'est le ***groupe unitaire*** de E.

Si $u \in U(E)$, on a $\det u \in \mathbb{U}$. On pose :

$$SU(E) = \{u \in U(E) \,;\, \det u = 1\}.$$

C'est un sous-groupe de $U(E)$, appelé le ***groupe spécial unitaire*** de E.

La proposition suivante justifie le terme « unitaire » pour les endomorphismes unitaires :

Proposition 4.5.3. *Soit u un endomorphisme unitaire de E.*

(i) *Si F est un sous-espace de E stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u.*

(ii) *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de u, alors $\lambda \in \mathbb{U}$.*

♦ **Exercice 53.** Démontrer cette proposition.

Le théorème suivant diffère très fondamentalement du cas euclidien :

Théorème 4.5.1. *Soient E un espace vectoriel hermitien de dimension finie et $u \in U(E)$. Il existe une base* orthonormée *de E formée de vecteurs propres pour u, et les valeurs propres de u sont de module* 1.

⚠ **Attention** : dans le cas euclidien, un endormorphisme orthogonal n'est pas diagonalisable en général : penser aux rotations en dimension 2 qui ne sont que très rarement diagonalisables ! En effet, la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

est diagonalisable <u>sur $\mathbb{R}$</u> si et seulement si $\theta = 0 \mod \pi$.

4.6 Endomorphismes hermitiens

Dans toute la suite, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel hermitien de dimension finie n non nulle.

Définition 4.6.1. *Un endomorphisme u de E est dit* **auto-adjoint** *ou* **hermitien** *s'il vérifie $u = u^*$.*

On note $\mathrm{Her}(E)$ l'ensemble des endomorphismes hermitiens de E ; c'est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Her}(E) = n^2$ (cf. exercice 47).

Théorème 4.6.1. *Soient E un espace hermitien de dimension finie n non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $u \in \mathrm{Her}(E)$ *;*

(ii) *il existe une base orthonormée $\mathcal{E}$ de E telle que* $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$ *;*

(iii) *pour toute base orthonormée $\mathcal{E}$ de E, on a* $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{E}) \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$ *;*

(iv) *on a $(u(x) \,|\, x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in E$;*

(v) *il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour u, et les valeurs propres de u sont réelles.*

Remarques. 1) Tout comme le Théorème fondamental dans le cas euclidien (cf. Théorème 1.7.1), le théorème précédent est fondamental ; en particulier, il faut systématiquement penser à appliquer l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (v) quand on étudie un problème concernant les endomorphismes hermitiens. La démonstration est cependant nettement plus simple dans le cas complexe grâce au Théorème de d'Alembert-Gauss (cf. exercice ci-dessous). Nous réservons donc l'appellation « Théorème fondamental » pour le cas réel.
2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le fait que E possède une base orthonormée formée de vecteurs propres pour u n'implique <u>pas</u> que u soit hermitien.

♦ **Exercice 54.** Démontrer ce théorème.

♦ **Exercice 55.** 1) Soit $u \in \mathrm{Her}(E)$. Montrer

$$E = \ker u \oplus \mathrm{Im}\, u \ , \ \mathrm{Im}\, u = (\ker u)^{\perp}.$$

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si il existe $U \in U(n)$ telle que U^*AU soit diagonale à élément réels.

Exercice 34 (Théorème de Courant-Fischer)**.** ⋆ Soient E un espace hermitien de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathrm{Her}(E)$ de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Montrer :

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2} ; x \in E \setminus \{0\} \right\}, \qquad \lambda_n = \max \left\{ \frac{(u(x)|x)}{\|x\|^2} ; x \in E \setminus \{0\} \right\}.$$

4.7 Endomorphismes hermitiens positifs

Soit E un espace hermitien. D'après le théorème précédent, les notations suivantes sont légitimes :

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{Her}^+(E) & = & \{u \in \mathrm{Her}(E) \mid \mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_+\}; \\ \mathrm{Her}^-(E) & = & \{u \in \mathrm{Her}(E) \mid \mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_-\}; \\ \mathrm{Her}^{++}(E) & = & \{u \in \mathrm{Her}(E) \mid \mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_+^*\}; \\ \mathrm{Her}^{--}(E) & = & \{u \in \mathrm{Her}(E) \mid \mathrm{Spec}(u) \subset \mathbb{R}_-^*\}. \end{array}$$

Un élément de $\mathrm{Her}^+(E)$ (resp. $\mathrm{Her}^-(E)$) est dit ***hermitien positif*** (resp. ***hermitien négatif***), et un élément de $\mathrm{Her}^{++}(E)$ (resp. $\mathrm{Her}^{--}(E)$) est dit ***hermitien défini positif*** (resp. ***hermitien défini négatif***).

On adopte des notations et une terminologie analogue pour les matrices. Ainsi, $A \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$ est dite ***hermitienne positive*** si $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

Proposition 4.7.1. *Soient E un espace hermitien de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $u \in \mathrm{Her}^+(E)$ *;*
(ii) $(u(x) \,|\, x) \in \mathbb{R}_+$ *pour tout* $x \in E$ *;*
(iii) *il existe* $v \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $u = v \circ v^*$ *;*
(iv) *il existe* $w \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $u = w^* \circ w$.

♦ **Exercice 56.** Démontrer cette proposition.

Exercice 35. Soient E un espace hermitien de dimension $n > 0$ et $u, v \in \mathrm{Her}^+(E)$.
1) Montrer que si $x \in E$, alors $x \in \ker u$ si et seulement si $(u(x) \,|\, x) = 0$.
2) On a $\ker(u+v) = \ker u \cap \ker v$ et $\mathrm{Im}\,(u+v) = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$.
3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $w \in \mathrm{Her}^+(E)$ tel que $w^k = u$.

Exercice 36. ⋆ Soient $A \in \mathrm{Her}_n^{++}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^*AP = I_n$ et telle que P^*BP soit diagonale.

Exercice 37. Soient E un espace vectoriel hermitien de dimension finie $n > 0$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
1) Montrer que $\mathrm{Im}\, u^* = (\ker u)^{\perp}$, $\ker u^* = (\mathrm{Im}\, u)^{\perp}$.
2) Prouver que $u \circ u^*$ et $u^* \circ u$ sont hermitiens positifs.
3) Montrer que $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\,(u \circ u^*)$, $\ker u = \ker(u^* \circ u)$.

Exercice 38. * Soit E un espace vectoriel hermitien de dimension finie $n > 0$. On dit qu'un endomorphisme v de E est ***normal*** s'il commute avec son adjoint, i.e., $v \circ v^* = v^* \circ v$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est normal ;

(ii) $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ pour tout $x \in E$;

(iii) il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour u ;

(iv) il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$;

(v) tout sous-espace de E stable par u est stable par u^* ;

(vi) pour tout sous-espace F de E stable par u, $F^\perp$ est stable par u ;

(vii) on a $\mathrm{Tr}\,(u \circ u^*) = |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2$.

On retiendra en particulier qu'un endomrophisme normal d'un espace hermitien est diagonalisable dans une base orthonormée de E (ce que nous avions déjà observé pour les endomorphismes unitaires et hermitiens).

⚠ **Attention** : ce résultat est faux dans le cas euclidien. De nouveau, penser aux rotations qui sont très rarement diagonalisables sur $\mathbb{R}$ (a fortiori dans une base orthonormée) !